PARAGRAAF 13.1 : BEREKENINGEN MET DE AFGELEIDE

LES 1 : HERHALING DIFFERENTIËREN

DIFFERENTIËREN VAN E-MACHTEN EN LOGARITMEN

- $f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x$
- $f(x) = ln(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = {}^g log\,(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x ln(g)}$

OPMERKING

Ook bij *e*^{x} en ln(x) kun je productregel, quotiëntregel of kettingregel nodig hebben!!!

VOORBEELD 1

Differentieer

a. $f(x) = 8x^2 ln(x)$

b. $f(x) = \frac{(3x-5)}{e^{2x}}$

OPLOSSING 1

a. $f'(x) = 16x \cdot ln(x) + 8x^2 \cdot \frac{1}{x} = 16x ln(x) + 8x$

b. $f'(x) = \frac{e^{2x} \cdot 2 \cdot (3x-5) - 3e^{2x}}{e^{4x}}$

LES 2 : EXTREMEN EN HELLING

DEFINITIE

- Extreem = { Maximum of minimum }
- Extreem is een punt waar de helling gelijk is aan nul.
- Extreem → $f'(x) = 0$
- Snelheid is hetzelfde als helling (=$f'(x)$)

VOORBEELD 1

Gegeven is de formule $f(x) = 2x^3 - 24x + 2$ en $g(x) = 3x^2 - 8x + 1$

a. Bereken de extremen van f.

b. Toon aan dat x = 3 geen extreem is van g. Geef aan of de formule hier stijgt of daalt.

OPLOSSING 1

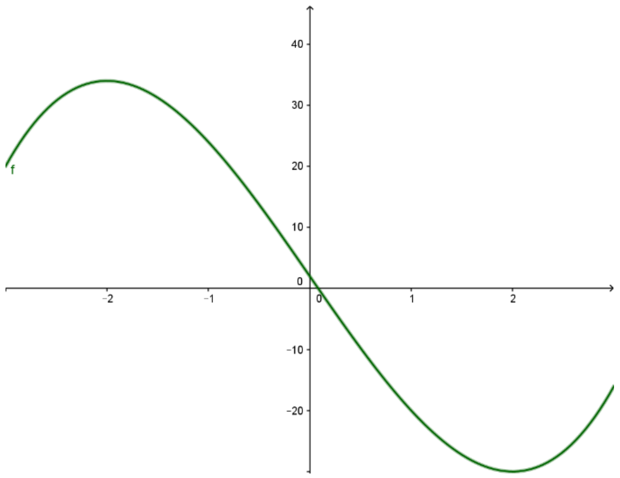
a. **(1)** $f'(x) = -6x^2 + 24 = 0$

$6x^2 = 24$

$x^2 = 4$

$x = 2 \ v \ x = -2$

(2) Schets geeft *:*



(3) max $y = f(-2) = 34$

min $y = f(2) = -30$

b. Je kunt x =3 invullen in de afgeleide om te kijken of er een top is

$f'(x) = 6x - 8$

$f'(3) = 6 \cdot 3 - 8 = 10 \neq 0$ dus GEEN top

Omdat $f'(3) = 10$ is de helling 10 dus is de grafiek daar stijgend.

PARAGRAAF 13.2 : REDENEREN MET DE AFGELEIDE

THEORIE STIJGEN / DALEN FORMULE

Als je wil aantonen of een formule f(x) stijgend (of dalend) is, kun je dat op 3 verschillende manieren doen :

1. **M.b.v de formule van f(x)**

   Als x stijgt → ⋯ → f(x) is stijgend

2. **M.b.v de <u>formule</u> van de afgeleide f'(x)**

   f'(x) moet dan altijd positief zijn !!!

   Als f'(x) een breuk is, moet je

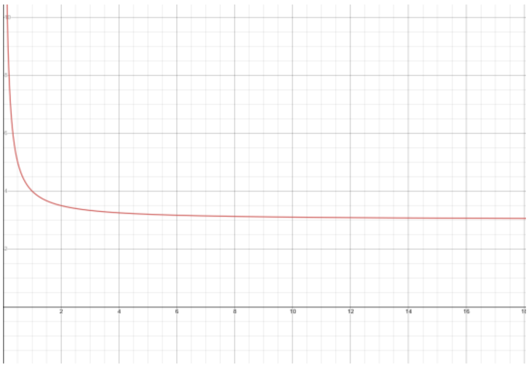
   1) $Teller\ >\ 0$ (want, …)

   2) $Noemer\ >\ 0$ (want, …)

   3) $Breuk = \frac{Teller}{Noemer} = \frac{pos}{pos} = pos$ f'(x) is positief, dus f(x) is stijgend

3. **M.b.v de <u>grafiek</u> van de afgeleide f'(x)**

   Schets de grafiek op de GR, dus Y1 = f'(x)



Omdat f'(x) altijd positief is, is f(x) stijgend

OPMERKING

Omdat je ook ziet dat f'(x) steeds minder positief wordt, is f(x) afnemend stijgend !!

VOORBEELD 1

Gegeven is de functie : $f(x) = 3 + \frac{10}{x+5}$ met x > 0..

Toon aan of de grafiek stijgend of dalend is :

a. m.b.v. de formule van f(x)

b. m.b.v. de formule van de afgeleide f'(x)

c. m.b.v. de grafiek van f'(x).

d. Toon aan of dit een toenemende of afnemende stijging/daling is.

OPLOSSING 1

a. Als x stijgt $\rightarrow x + 5$ stijgt

$\rightarrow \frac{10}{x+5}$ daalt

$\rightarrow 3 + \frac{10}{x+5}$ daalt

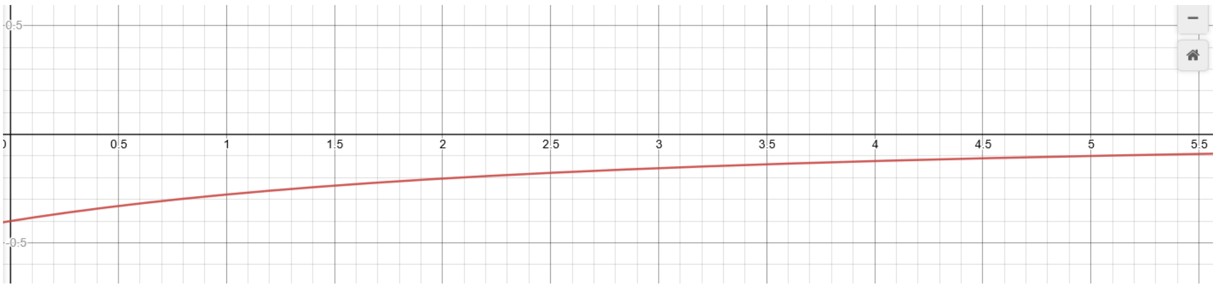
b. $f(x) = \frac{(x+5)\cdot 0 - 10\cdot 1}{(x+5)^2} = \frac{-10}{(x+5)^2}$

1) Teller = -10 < 0 Dus Teller = neg

2) Noemer = $(x+5)^2 > 0$ omdat een kwadraat altijd positief is. Dus Noemer = pos

3) $Breuk = \frac{Teller}{Noemer} = \frac{neg}{pos} = neg$ f'(x) is positief, dus f(x) is stijgend

c. $Y_1 = \frac{-10}{(x+5)^2}$



Omdat f'(x) altijd negatief is, is f(x) dalend

d. Omdat f'(x) steeds minder negatief wordt, is f(x) afnemend dalend !!

PARAGRAAF 13.3 : SOORTEN STIJGEN EN DALEN

THEORIE TOENEMEND / AFNEMEND STIJGEN / DALEN

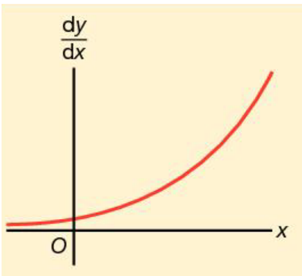
Naast stijgen en dalen moet je ook vaak onderzoeken of de stijging of daling toeneemt of afneemt. Dat betekent dat je twee stappen moet uitvoeren

(1) Bepaal eerst of de grafiek stijgend of dalend is ($f'(x) > 0$ of $f'(x) < 0$).

(2) Bepaal vervolgens of het toeneemt of afneemt.

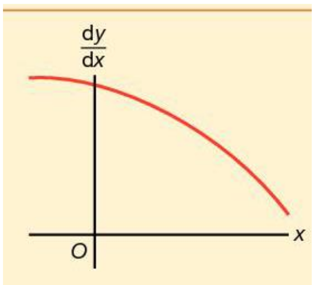
Er zijn vier soorten met bijbehorende grafiek van f'(x) :

1. Toenemende stijging



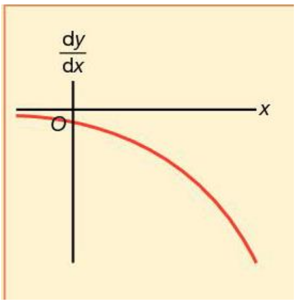
- De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ ligt boven de x-as, dus de grafiek van y is stijgend.
- De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ is bovendien stijgend, dus de grafiek van y is toenemend stijgend.

2. Afnemende stijging



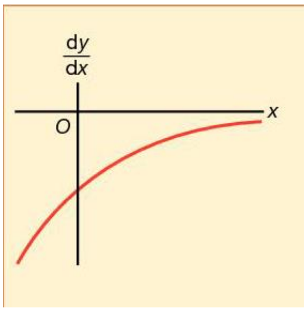
- De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ ligt boven de x-as, dus de grafiek van y is stijgend.
- De grafiek van $\frac{dy}{dx}$ is bovendien dalend, dus de grafiek van y is afnemend stijgend.

3. Toenemende daling



- De grafiek van $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ ligt onder de x-as, dus de grafiek van y is dalend.
- De grafiek van $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ is bovendien dalend, dus de grafiek van y is toenemend dalend.

4. Afnemende daling



- De grafiek van $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ ligt onder de x-as, dus de grafiek van y is dalend.
- De grafiek van $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ is bovendien stijgend, dus de grafiek van y is afnemend dalend.

VOORBEELD 2

Gegeven is de winstfunctie : $W(x) = {}^{3}\log(6x + 7)$. Hierin stelt x het aantal geproduceerde producten voor en is W de winst in duizenden euro's.

a. Bepaal de afgeleide.

b. Toon aan m.b.v. de grafiek van de afgeleide of de winst stijgend en/of dalend is.

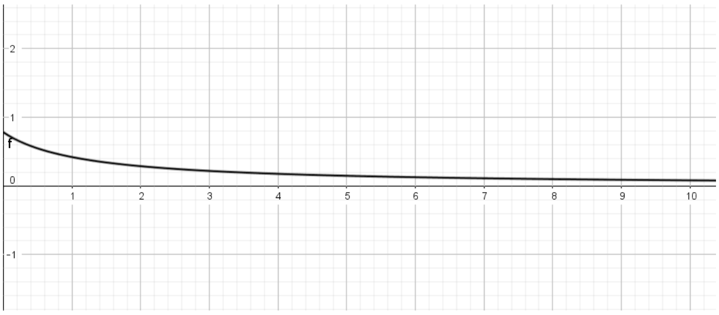
c. Bereken aan de hand van de formule van W' of de winst stijgend en/of dalend is.

d. Bepaal aan de hand van de grafiek van W' wat voor soort stijgen/dalen de formule is.

OPLOSSING 2

a. $W'(x) = \frac{1}{(6x+7)ln(3)} \cdot 6 = \frac{6}{(6x+7)ln(3)}$

b. Eerst de grafiek plotten en schetsen op papier :



Omdat W’ overal positief is, is de grafiek van W (de winst) overal stijgend.

c. $W'(x) = \frac{1}{(6x+7)ln(3)} \cdot 6 = \frac{6}{(6x+7)ln(3)}$

Omdat x > 0 geldt

(1) $6x + 7 > 0 \ \rightarrow (6x + 7)\ln(3) > 0 \rightarrow noemer > 0$

(2) 6 > 0 dus teller > 0

(3) Dus teller en noemer altijd positief, dus breuk = W’ altijd positief
Omdat W’ overal positief is, is de grafiek van W (de winst) overal stijgend.

d. Als je naar de grafiek van W’ kijkt zie je :

1. De waarden van W’ zijn positief > W is stijgend
2. De waarden zijn steeds kleiner positief > W is afnemend stijgend

PARAGRAAF 13.3 : SOORTEN STIJGEN EN DALEN

LES 1 MAXIMALE OF MINIMALE HELLING / SNELHEID (=BUIGPUNT)

DEFINITIE

- Buigpunt = { Punt waar de helling maximaal of minimaal is }

Er zijn twee manieren om een maximale of minimale helling te berekenen

1. $f'(x)$ heeft een top → $f''(x) = 0$

2. Vaak is dit niet te berekenen bij moeilijke functies. Dan kan het ook met de GR door

(1) $Y1 = f'(x)$

(2) calc maximum of minimum (= maximale/minimale helling)

VOORBEELD 1

Gegeven is de formule $f(x) = 3x^3 - 18x^2 + 2$

a. Bereken de x-coördinaat waar de snelheid minimaal is.

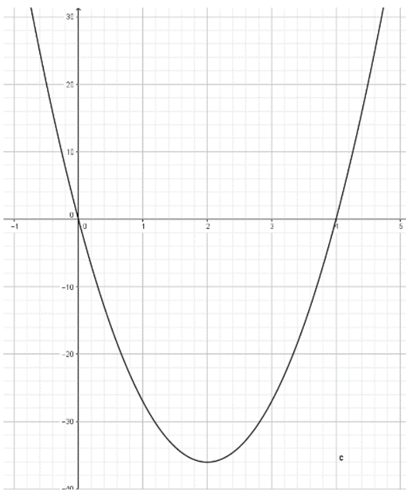
b. Bereken de minimale snelheid.

c. Geef aan voor welk interval de grafiek afnemend dalend is.

OPLOSSING 1

a. **1**. Met $f''(x)$:

$$f'(x) = 9x^2 - 36x$$
$$f''(x) = 18x - 36 = 0$$
$$18x = 36$$
$$x = 2$$



2. Met de GR :

$$Y1 = 9x^2 - 36x$$

Calc minimum geeft $x = 2$

b. In $x = 2$ is de snelheid gelijk aan $f'(2) = -72$

c. In de GR zie je

1. Snelheid = 0 bij x=0 en x=4 (berekenen)

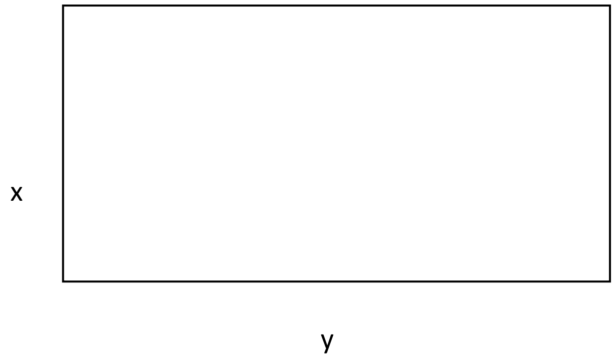
2. De daling neemt af vanaf de top (x=2) tot het snijpunt (x=4).

3. Daarna stijgt de grafiek, want f'(x) is dan positief.

4. Dus afnemend dalend : $< 2{,}4 >$

PARAGRAAF 13.4 : OPTIMALISEREN

LES 1 PRAKTISCHE PROBLEMEN DEEL 1



VOORBEELD 1

Een boer heeft een stuk land met lengte y en breedte x. Hij heeft 380 m gaas waarmee hij een zo groot mogelijke oppervlakte wil afzetten.
Bereken algebraïsch de grootst mogelijke oppervlakte voor dit stuk land.

STAPPENPLAN PRAKTISCH PROBLEEM

(1) Stel de 1^e formule waar je een getal van weet en schrijf deze om tot y =…

(2) Stel de 2^e formule van de formule die je maximaal (minimaal moet maken)

(3) Vul de y-formule in in de 2^e formule

(4) Differentieer om het maximum te vinden en bereken het maximum

OPLOSSING 1

Stel twee formules op

(1) De lengte van het gaas : $2x + 2y = 380$

Schrijf formule 1 om tot y =… : $2y = 380 – 2x$

$190 – x$

(2) De oppervlakte : $Opp = x \cdot y$

(3) Vul de y-formule in in de opp : $Opp = x \cdot (190 – x) = 190x – x^2$.

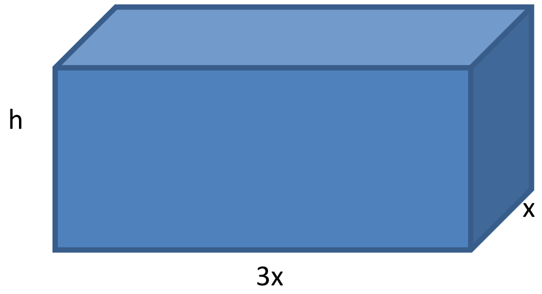
(4) Differentieer om het maximum te vinden $Opp' = 190 – 2x = 0$

$2x = 190$

$x = 95$

(5) Bereken de maximale oppervlakte : $Opp (95) = 190 \cdot 95 – 952 = 9025\ m^2$.

VOORBEELD 2



Gegeven is een doosje waarvan de lengte 3 keer zo groot is als de breedte.
De inhoud van dit doosje is 3000 cm^3. De kosten voor de zijkanten zijn € 0,20 per cm^2. De boven- en onderkant zijn € 0,50 per cm^2.

a. Toon aan dat de hoogte te schrijven is als $h = \frac{1000}{x^2}$.

b. Bepaal de formule van de oppervlakte van het doosje uitgedrukt in x.

c. Bepaal de formule van de kosten van het doosje uitgedrukt in x.

d. Bereken de afmetingen van het doosje wanneer de kosten minimaal zijn. Rond af op 1 decimaal.

OPLOSSING 2

a. Inhoud = 3x·x·h = 3000 dus $h = \frac{3000}{3x^2} = \frac{1000}{x^2}$

b. Oppervlakte bestaat uit

Opp voor en achter	= (3x·h) ·2	= 6xh
Opp links en rechts	= (x·h) ·2	= 2xh
Opp voor en achter	= (3x·x) ·2	= $6x^2$

Opp totaal = 8xh + $6x^2$ = $8x \cdot \frac{1000}{x^2} + 6x^2 = \frac{8000x}{x^2} + 6x^2 = \frac{8000}{x} + 6x^2$

c. Oppervlakte bestaat uit

Opp voor en achter	= 6xh	→ Kosten x € 0,20 → 1,20xh
Opp links en rechts	= 2xh	→ Kosten x € 0,20 → 0,40xh
Opp voor en achter	= $6x^2$	→ Kosten x € 0,50 → $3x^2$
Kosten totaal	= 1,6xh + $3x^2$.	

Kosten totaal in x $= 1{,}6x \cdot \frac{1000}{x^2} + 3x^2 = \frac{1600x}{x^2} + 3x^2 = \frac{1600}{x} + 3x^2$

d. Er staat bereken, dus het mag met de GR :

$Y1 = \frac{1600}{x} + 3x^2$

calc minimum geeft x = 6,4365962.

De afmetingen zijn dan

Hoogte $h = \frac{1000}{6{,}436\ldots^2} = 24{,}1\ cm$

Breedte $x = 6{,}4\ cm$

Lengte $3x = 3 \cdot 6{,}43.. = 19{,}3\ cm$